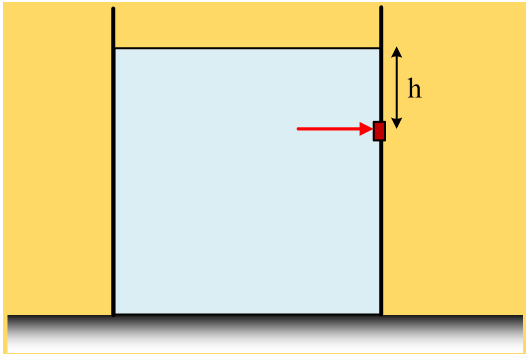
Η δύναμη με κλειστή και ανοικτή τάπα



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα δοχείο με νερό, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (εντός της ατμόσφαιρας). Μια μικρή οπή, στην παράπλευρη έδρα του δοχείου, βρίσκεται σε βάθος h από την επιφάνεια και κλείνεται με τάπα. Αν ρ η πυκνότητα του νερού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και A το άνοιγμα της οπής:

i) Το νερό ασκεί στην τάπα μια οριζόντια δύναμη F_1, μέτρου:

α) $F_1 < \rho g h A$, β) $F_1 = \rho g h A$, γ) $F_1 > \rho g h A$.

ii) Σε μια στιγμή βγάζουμε την τάπα και σε ελάχιστο χρόνο αποκαθίσταται μια μόνιμη ροή. Αν το νερό θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, τότε η (συνισταμένη) δύναμη που επιταχύνει μια πολύ μικρή μάζα νερού Δm, κατά την έξοδό της από το δοχείο, θεωρώντας ότι ελάχιστα πριν την έξοδο έχει αμελητέα ταχύτητα, έχει μέτρο F_2, όπου:

α) $F_2 = \rho g h A$, β) $F_2 = 2\rho g h A$, γ) $F_2 = (p_{ατμ} + \rho g h)\cdot A$

iii) Η δύναμη F_3 όπου το υπόλοιπο νερό ασκεί στην μάζας Δm, στη διάρκεια της εξόδου της από το δοχείο έχει μέτρο:

α) $F_3 < F_2$, β) $F_3 = F_2$, γ) $F_3 > F_2$.

iv) Η παραπάνω μάζα Δm, ασκεί στο υπόλοιπο νερό του δοχείου μια δύναμη F_4, με μέτρο:

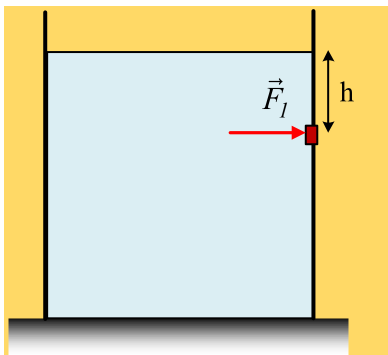
α) $F_4 = F_2$, β) $F_4 = 2F_2$, γ) $F_4 = F_3$.

v) Αν τη στιγμή που αποκαθίσταται η μόνιμη ροή, το δοχείο μαζί με το νερό που περιέχει έχουν συνολική μάζα M, αποκτούν επιτάχυνση προς τα αριστερά, με μέτρο:

α) $α = F_1/M$, β) $α = F_2/M$, γ) $α = F_4/m$.

Να δικαιολογήσετε τις επιλογές σας.

Απάντηση:



i) Θεωρώντας μικρό το άνοιγμα της οπής, συνεπώς μικρό και το εμβαδόν της τάπας, που την κλείνει και έρχεται σε επαφή με το νερό, δεχόμαστε ότι σε όλα τα σημεία της τάπας, επικρατεί η ίδια πίεση με τιμή:

$$p_1 = p_{ατμ} + \rho g h$$

Οπότε η τάπα δέχεται οριζόντια δύναμη (κάθετη στην επιφάνειά της, όπως στο σχήμα) με μέτρο:

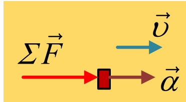
$$F_1 = p_1 A = (p_{ατμ} + \rho g h)A > \rho g h A$$

Σωστό το γ).

ii) Μόλις ανοίξουμε την τάπα, το νερό εκρέει με μια ταχύτητα υ, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε από την εξίσωση Bernoulli, αλλά ας προτιμήσουμε εδώ το θεώρημα Torricelli:

$$\upsilon = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Οπότε από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για την μάζα Δm, θεωρώντας ότι ξεκινά από την ηρεμία, θα έχουμε:



$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} \rightarrow \Sigma F = \frac{P_{\tau\varepsilon\lambda} - P_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \frac{\Delta m\cdot\upsilon - 0}{\Delta t} = \frac{\rho(A\Delta x)\cdot\upsilon}{\Delta t}$$

Μιλώντας για την έξοδο μιας μάζας σχήματος κυλίνδρου (κυκλική οπή) ύψους Δx, τότε αν υ_μ η μέση ταχύτητα στη διάρκεια της εξόδου, θα ισχύει $\upsilon_\mu = ½\, \upsilon$ οπότε με αντικατάσταση, παίρνουμε:

$$\Sigma F = \frac{\rho(A\Delta x)\cdot\upsilon}{\Delta t} = \frac{\rho A\cdot\frac{1}{2}\upsilon\cdot\Delta t\cdot\upsilon}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho A\upsilon^2 \xrightarrow{(1)}$$

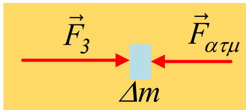
$$F_2 = \Sigma F = \frac{1}{2}\rho A\cdot 2gh \Rightarrow$$

$$F_2 = \rho g h A$$

Σωστό το β).

Ας σημειωθεί ότι η παραπάνω τιμή της δύναμης F_2, είναι η μέση τιμή της δύναμης.

iii) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην μάζα Δm στη διάρκεια της επιτάχυνσής της, κατά την έξοδο. Η δύναμη F_3 από το υπόλοιπο νερό και η $F_{\alpha\tau\mu}$ εξωτερικά, λόγω ατμοσφαιρικής πίεσης. Η συνισταμένη τους δεν είναι άλλη από την δύναμη F_2 που υπολογίσαμε παραπάνω. Δηλαδή έχουμε:



$$\vec{F}_2 = \vec{F}_3 + \vec{F}_{\alpha\tau\mu} \xrightarrow{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\alpha} F_2 = F_3 - F_{\alpha\tau\mu} \rightarrow$$

$$F_3 = F_2 + F_{\alpha\tau\mu} = \rho g h A + p_{\alpha\tau\mu}A \rightarrow$$

$$F_3 = \left(p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h\right)A$$

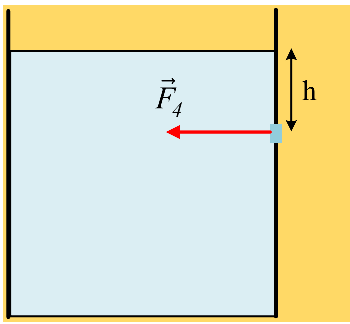
Σωστό το γ) $F_3 > F_2$.

iv) Με βάση τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, η στοιχειώδης μάζα Δm που εκρέει, ασκεί στο υπόλοιπο νερό που παραμένει στο δοχείο, την αντίδραση της F_3, μια δύναμη F_4 του ίδιου μέτρου:

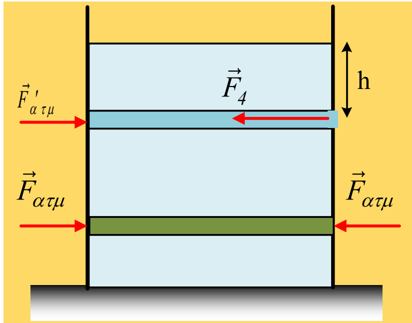
$$F_4 = \left(p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h\right)A$$

Με κατεύθυνση προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα.

Σωστό το γ).

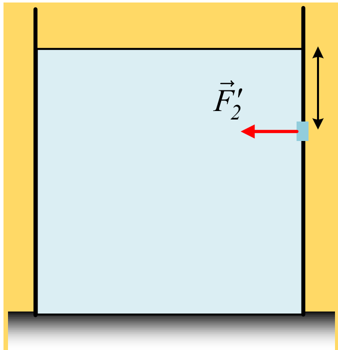


v) Το δοχείο (μαζί με το νερό που είναι στο εσωτερικό του) δέχονται στην οριζόντια διεύθυνση την παραπάνω δύναμη F_4 (από το νερό που εκρέει) και δυνάμεις $F_{\alpha\tau\mu}$, λόγω ατμοσφαιρικής πίεσης. Έτσι αν πάρουμε ένα



μικρό παραλληλεπίπεδο (με πράσινο χρώμα στο σχήμα), οι δυο δυνάμεις από την ατμόσφαιρα εξουδετερώνονται, αφού έχουν αντίθετες κατευθύνσεις και μέτρα $F_{ατμ}=p_{ατμ}\cdot A$, οπότε $ΣF_i=0$. Αν το μικρό παραλληλεπίπεδο είναι αυτό που περιλαμβάνει την οπή, τότε η συνισταμένη δύναμη που δέχεται από το περιβάλλον του έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά και **μέτρο**:

$$ΣF_o = F_4 - F'_{ατμ} = \left(\rho gh + p_{ατμ}\right)A - p_{ατμ}A = \rho ghA \rightarrow$$
$$ΣF_o = F_2$$



Συνεπώς η μοναδική δύναμη που θα επιταχύνει το δοχείο προς τα αριστερά, είναι μια οριζόντια δύναμη F_2', με μέτρο ίσο με το μέτρο της δύναμης F_2 που επιταχύνει το νερό που εκρέει, οπότε το δοχείο αποκτά επιτάχυνση με μέτρο:

$$ΣF_o = Ma \rightarrow a = \frac{ΣF_o}{M} \Rightarrow$$

$$a = \frac{F_2}{M}$$

Σωστό το β).

Σχόλιο.

Η ύπαρξη της ατμόσφαιρας, έχει σαν αποτέλεσμα σε κάθε σημείο ενός του υγρού η πίεση να είναι αυξημένη κατά $p_{ατμ}$ με αποτέλεσμα σε κάθε επιφάνεια στο εσωτερικό του να ασκείται μεγαλύτερη δύναμη.

Όμως αυτό δεν επηρεάζει καθόλου την εκροή του υγρού από μια τρύπα που θα ανοίξουμε στο δοχείο, αφού και εξωτερικά υπάρχει ατμοσφαιρική πίεση, με αποτέλεσμα η δύναμη που επιταχύνει μια μάζα Δm να είναι ανεξάρτητη της ύπαρξης ή μη, ατμοσφαιρικής πίεσης ($F_2 = \rho ghA$).

Αλλά τότε η αντίδραση της παραπάνω δύναμης F_2΄είναι αυτή που θα επιταχύνει και το δοχείο, επίσης ανεξάρτητη της ύπαρξης ή μη ατμόσφαιρας…

dmargaris@gmail.com