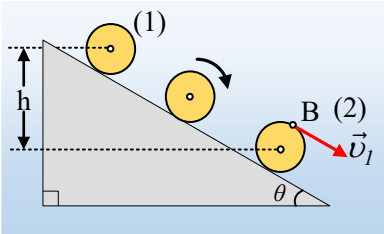
Ένας δίσκος επιταχύνεται κατεβαίνοντας στο επίπεδο



Στη θέση (1) ενός κεκλιμένου επιπέδου, κλίσεως θ=30°, αφήνεται ένας ομογενής δίσκος ακτίνας R=0,8m, ο οποίος αρχίζει να κινείται προς τα κάτω, περιστρεφόμενος δεξιόστροφα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά από χρονικό διάστημα t=2s, ο δίσκος περνά από την θέση (2). Η κατακόρυφη απόσταση των θέσεων (1) και (2) είναι h=4m, ενώ το σημείο Β του δίσκου έχει την μέγιστη ταχύτητα (μεταξύ όλων των σημείων του δίσκου), μέτρου υ_1=12m/s, με κατεύθυνση παράλληλη στο επίπεδο. Με δεδομένο ότι τόσο η επιτάχυνση του κέντρου μάζας, όσο και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, παραμένουν σταθερές, ζητούνται:

i) Η επιτάχυνση του κέντρου Ο του δίσκου, καθώς και η ταχύτητά του στη θέση (2).

ii) Η γωνιακή ταχύτητα και η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου.

iii) Η ταχύτητα του σημείου Γ, αντιδιαμετρικού του σημείου Β, στην θέση (2).

iv) Πόσες περιστροφές πραγματοποίησε ο δίσκος μέχρι να φτάσει στη θέση (2);

Απάντηση:

i) Θεωρούμε την κίνηση του δίσκου ως σύνθετη, όπου για την μεταφορική, αφού το κέντρο μάζας κινείται με σταθερή επιτάχυνση α_{cm}, θα έχουμε μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με εξισώσεις:

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t \ \ (1) \ \ \text{και} \ \ \Delta x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \ \ (2)$$

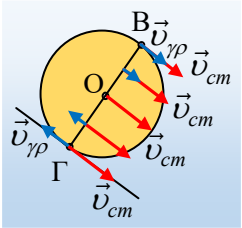
Όμως για την μετατόπιση Δx του κέντρου Ο του δίσκου ισχύει:

$$\eta\mu\theta = \frac{h}{\Delta x} \rightarrow \Delta x = \frac{h}{\eta\mu\theta} = \frac{4m}{1/2} = 8m$$

Οπότε από την εξίσωση (2) βρίσκουμε:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \rightarrow a_{cm} = \frac{2\Delta x}{t^2} = \frac{2 \cdot 8}{2^2} m/s^2 = 4m/s^2. \rightarrow$$

$$\upsilon_{cm} = a_{cm} t = 4 \cdot 2m/s = 8m/s$$



ii) Τα σημεία του δίσκου που έχουν ταχύτητα παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο, είναι τα σημεία της διαμέτρου ΒΓ, της κάθετης στο επίπεδο. Πράγματι το κέντρο του δίσκου Ο κινείται παράλληλα στο επίπεδο με ταχύτητα υ_{cm}, ενώ κάθε άλλο σημείο έχει ταχύτητα ίση με το διανυσματικό άθροισμα της υ_{cm} και της γραμμικής ταχύτητας $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega \cdot r$, λόγω της κυκλικής του κίνηση, η οποία οφείλεται στην περιστροφική κίνηση του δίσκου. Αλλά τότε την μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα, την έχει το σημείο Β στο άκρο της διαμέτρο, αφού οι δύο ταχύτητες είναι ομόρροπες και η γραμμική ταχύτητα έχει μέγιστο μέτρο $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega \cdot R$:

$$\upsilon_B = \upsilon_1 = \upsilon_{cm} + \omega R \rightarrow \omega = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_{cm}}{R} \rightarrow$$

$$\omega = \frac{12-8}{0,8} rad/s = 5 rad/s$$

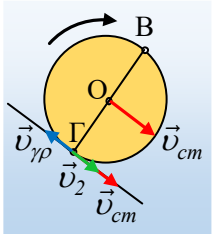
Ενώ για την ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση του δίσκου ισχύουν οι εξισώσεις (κατ' αναλογία με την ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση):

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} t \quad (3) \quad \text{και} \quad \Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 \quad (4)$$

Από την εξίσωση (3) βρίσκουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega}{t} = \frac{5}{2} rad/s^2 = 2,5 rad/s^2.$$

iii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι ταχύτητες του σημείου Γ, λόγω μεταφορικής και λόγω περιστροφικής κίνησης. Έτσι η ταχύτητά του έχει την κατεύθυνση της υ_{cm} και μέτρο:



$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_2 = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\gamma\rho} = \upsilon_{cm} - \omega R = 8m/s - 5 \cdot 0,8 m/s = 4 m/s$$

iv) Με αντικατάσταση στην εξίσωση (4) βρίσκουμε την γωνία κατά την οποία έχει περιστραφεί ο δίσκος, μέχρι τη στιγμή t=2s:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu} t^2 = \frac{1}{2} 2,5 \cdot 2^2 rad = 5 rad$$

Οπότε το πλήθος των περιστροφών του δίσκου είναι:

$$N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{5}{2\pi} = 0,8 \text{ περιστροφές.}$$

Σχόλιο:

Ένας συμμαθητής σας βρήκε τον αριθμό των περιστροφών από την εξίσωση:

$$N_1 = \frac{\Delta x}{2\pi R} = \frac{8}{2\pi \cdot 0,8} = 1,6 \text{ περιστροφές.}$$

Μήπως έχει δίκιο; Αν όχι τι λάθος έκανε;

dmargaris@gmail.com