Γενικευμένη κεντρομόλος δύναμη

Τερλεμές Σπύρος
spyrossterlemes@gmail.com
28-1-2021

Αν ένα σωματίδιο ακολουθεί μια μη ευθύγραμμη τροχιά, τότε είναι αναγκαίο να δρουν σε αυτό δυνάμεις που να διαμορφώνουν την συγκεκριμένη τροχιά. Σε μια κυκλική τροχιά, έχουμε (πέρα των οποιοδήποτε άλλων δυνάμεων που μπορεί να επιδρούν) την γνωστή κεντρομόλο δύναμη στην ακτινική διεύθυνση. Σε μια τυχαία τροχιά είναι δυσκολότερη η εύρεση της αντίστοιχης δύναμης.

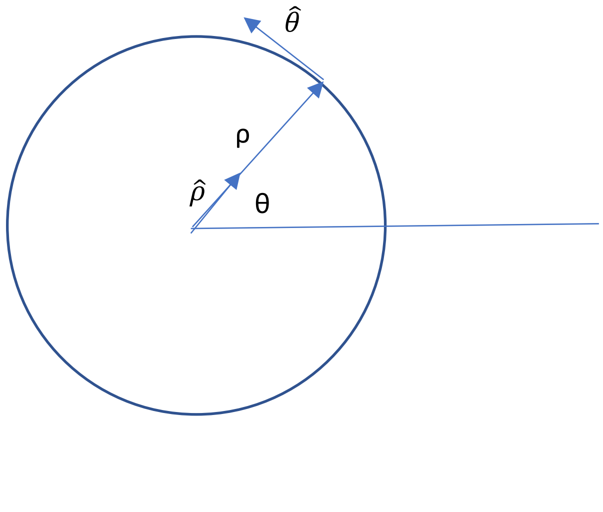
ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΔΥΝΑΜΗ ΣΕ ΚΥΚΛΙΚΗ ΤΡΟΧΙΑ

Έστω ένα σωματίδιο μάζας m που εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας ρ(t). Για να υπολογίσουμε την κεντρομόλο, ορίζουμε πολικό σύστημα με τα παρακάτω διανύσματα (δεδομένου ότι $\vec{\rho} = \rho cos\theta \hat{x} + \rho sin\theta \hat{y}$):

$$\hat{\rho} = \frac{\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \rho}}{\left|\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \rho}\right|} = cos\theta \hat{x} + sin\theta \hat{y}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \theta}\right|} = (-sin\theta \hat{x} + cos\theta \hat{y})$$

(1)



Τα διανύσματα $\hat{\rho}$ και $\hat{\theta}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα στην ακτινική και στην κάθετη στην ακτινική διεύθυνση αντίστοιχα (επιβεβαιώνεται η καθετότητα αφού έχουν μηδενικό εσωτερικό γινόμενο). Παρατηρούμε επίσης ότι $\dot{\hat{\rho}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$. Η επιτάχυνση τώρα είναι:

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2}{dt^2}(\rho\hat{\rho}) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}\right) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\hat{\rho} + \left(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

(2)

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην ακτινική επιτάχυνση και ο δεύτερος στην εφαπτομενική. Στην ειδική περίπτωση που το σωματίδιο κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ρ, τότε η σχέση (2) γίνεται:

$$\vec{\alpha} = -\frac{\upsilon^2}{\rho}\hat{\rho} + \rho\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

(3)

Έτσι η κεντρομόλος δύναμη θα είναι λοιπόν:

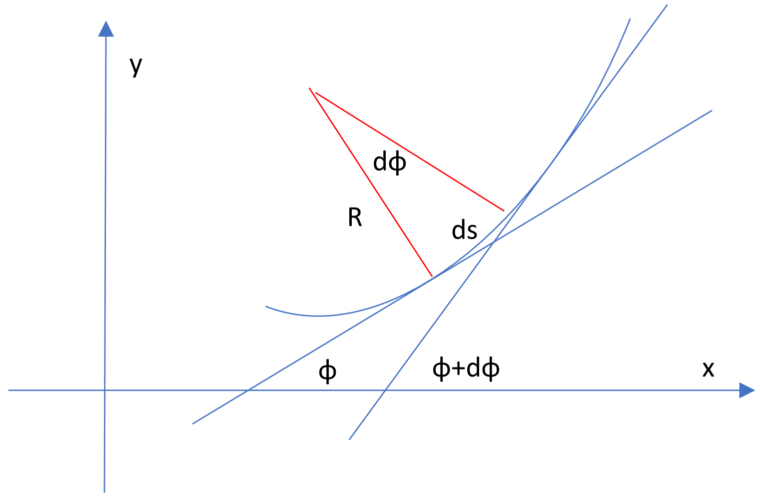
$$\overrightarrow{F_k} = -\frac{m\upsilon^2}{\rho}\hat{\rho}$$

(4)

Είναι όμορφο το γεγονός ότι η επιτάχυνση (2) μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας και αδρανειακές δυνάμεις, οι οποίες ουσιαστικά αποτελούν μεθόδους μετασχηματισμού συστημάτων αναφοράς.

ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑ ΜΙΑΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Αν έχουμε μια τυχαία καμπύλη τότε μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη κεντρομόλο σε κάθε θέση, χρησιμοποιώντας την κεντρομόλο της κυκλικής κίνησης. Με άλλα λόγια σε κάθε καμπύλη θα ισχύει ότι $F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{R}$ όπου R μια τιμή που ψάχνουμε ώστε να ικανοποιεί την F για κάθε καμπύλη. Οπότε είναι λογικό ότι R=R(x,y). Έστω λοιπόν η παρακάτω καμπύλη C που χαρακτηρίζεται από κλαδικές συναρτήσεις. Θα πάρουμε τον ένα κλάδο και το αποτέλεσμα θα ισχύει και για τους άλλους. Θέλουμε να έχουμε 2 διαδοχικά σημεία την στιγμή t και t+dt, με ταχύτητες κάθετες στην ακτίνα που φέρνουμε από ένα σημείο.



Αν σχηματίζονται γωνίες φ και φ+dφ, τότε η γωνία του τόξου θα είναι προφανώς dφ. Οπότε αν το τόξο είναι ds τότε η ακτίνα R που ψάχνουμε θα είναι:

$$Rd\varphi = ds \Longrightarrow R = \frac{ds}{d\varphi}$$

(1)

Έχουμε λοιπόν τώρα ότι:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{d\varphi} = \frac{dx}{d\varphi}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dx}{d\varphi}\sqrt{1 + y'^2}$$

(2)

Η γωνία φ είναι η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο, άρα είναι και:

$$tan\varphi = \frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} \Longrightarrow \frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(3)

Αλλά έχουμε:

$$\cos^2\varphi = \frac{(dx)^2}{(ds)^2} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

(4)

Άρα αντικαθιστώντας στην (3) παίρνουμε:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{(1 + y'^2)}{y''}$$

(5)

Έτσι τελικά, η ακτίνα R που ζητάμε είναι ίση με:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

(6)

Οπότε η κεντρομόλος δύναμη σε κάθε σημείο με τετμημένη x και τεταγμένη y θα δίνεται από την σχέση:

$$F_k = \frac{mv^2}{R} = mv^2\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(7)

ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΣΕ ΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ

Έστω ότι έχουμε ένα κυκλοειδές που χαρακτηρίζεται από τις (παραμετρικές) εξισώσεις:

$$x = \theta - sin\theta$$

$$y = 1 - cos\theta$$

Θέλουμε την κεντρομόλο στο ανώτατο σημείο. Τότε θα είναι cosθ=-1 άρα θ=π. Έχουμε τα εξής:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(1 - cos\theta)}{d(\theta - sin\theta)} = \frac{d(1 - cos\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{d(\theta - sin\theta)} = sin\theta\frac{1}{\frac{d(\theta - sin\theta)}{d\theta}}$$
$$= \frac{sin\theta}{1 - cos\theta} \Longrightarrow y'(\pi) = 0$$

$$y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{sin\theta}{1 - cos\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{sin\theta}{1 - cos\theta}\right)\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{(1 - cos\theta)^2} \Longrightarrow y''(\pi) = -\frac{1}{4}$$

Οπότε η ακτίνα R είναι:

$$R = \frac{1 + y'^2}{y''} = -4$$

Έτσι η κεντρομόλος είναι τελικά στο ανώτατο σημείο ίση με:

$$F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{4}$$

Φυσικά να ήταν d το ανώτατο σημείο (αντί για μονάδα) τότε η κεντρομόλος θα ήταν:

$$F_\kappa = \frac{m\upsilon^2}{4\frac{d}{2}} = \frac{m\upsilon^2}{2d}$$