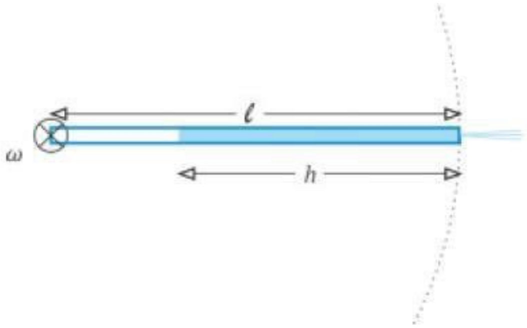
Περιστρεφόμενος σωλήνας με υγρό

Τερλεμές Σπύρος
spyrosssterlemes@gmail.com
22-12-2020

Έστω ένα περιστρεφόμενο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα δοχείο. Το δοχείο περιέχει αρχικά υγρό που απέχει h από το κέντρο Ο. Κάποια στιγμή ξεκινά η περιστροφή και το νερό αρχίζει και εκρέει. Τόσο εξωτερικά όσο και εσωτερικά επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση. Παρακάτω μελετώ την κίνηση του υγρού.



Θα εστιάσουμε στο πρώτο σωματίδιο δm του υγρού. Αυτό δέχεται την ατμοσφαιρική δύναμη από αριστερά και μια δύναμη επιφανειακής τάσης λόγω επαφής με το διαδοχικά επόμενο σωματίδιο. Θεωρούμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις τάσεις εξουδετερώνουν την ατμοσφαιρική δύναμη, με αποτέλεσμα το σωμάτιο να μην υπόκειται σε συνολική ακτινική δύναμη. Διαφορετικά το έργο της ατμοσφαιρικής πίεσης να είναι κάθε στιγμή αντίθετο με το έργο της δύναμης τάσης. Αυτό σημαίνει ότι σε πολικές συντεταγμένες, για το σωματίδιο έχουμε:

$$F(r) = \delta m\ddot{r} - \delta m\dot{\theta}^2 r_i$$

(1)

Εφόσον ακτινικά η συνολική δύναμη είναι μηδενική, τότε η σχέση (1) δίνει την γνωστή 2ης τάξης διαφορική:

$$\ddot{r} = \dot{\theta}^2 r$$

(2)

Αν θέλουμε απλά να βρούμε την ακτινική ταχύτητα που έχει το υγρό όταν εγκαταλείπει το δοχείο, τότε πολλαπλασιάζουμε με $\dot{r}$ (αφού $\dot{\theta} = \omega = σταθερό$) και έχουμε:

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{1}{2}r^2\omega^2 + C$$

(3)

Έτσι αν αρχικά $r = l - h$ και $\dot{r} = 0$ τότε

$$C = -\frac{1}{2}(l-h)^2\omega^2$$

(4)

Οπότε όταν $\boldsymbol{r = l}$ η (3) γίνεται:

$$\dot{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{2}}\left[\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{2}} - (\boldsymbol{l} - \boldsymbol{h})^{\boldsymbol{2}}\right] = \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{2}}\left(\frac{\boldsymbol{2l}}{\boldsymbol{h}} - \boldsymbol{1}\right)$$

(5)

Δηλαδή:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega h}\sqrt{\frac{\boldsymbol{2l}}{\boldsymbol{h}} - \boldsymbol{1}}$$

(6)

Μπορούμε όμως να μελετήσουμε γενικότερα την κίνηση, αν πάμε στην (2). Αυτή γράφεται:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

(7)

Άρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm\omega$$

Οπότε:

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

(8)

Παραγωγίζουμε:

$$\dot{r} = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}$$

Αρχικά είναι $r = l - h$ και $\dot{r}(0) = 0$ άρα:

$$A + B = l - h$$

$$A = B$$

Οπότε $A = B = (l - h)/2$ άρα έχουμε:

$$r = \frac{l - h}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

$$\dot{r} = \frac{l - h}{2}\omega(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

(9)

Όπως βρήκαμε την στιγμή που $r = l$ είναι:

$$\dot{r} = \omega h\sqrt{\frac{2l}{h} - 1}$$

Αντικαθιστώντας στην (9) παίρνουμε:

$$e^{\omega t} - e^{-\omega t} = \frac{2\sqrt{2lh - h^2}}{l - h}$$

(10)

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ

Από το ανάπτυγμα Taylor της e, έχουμε:

$$e^{\omega t} - e^{-\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^n - (-\omega t)^n}{n!}$$

(11)

Βλέπουμε ότι όταν n είναι άρτιος οι όροι μηδενίζονται, οπότε κρατάμε μόνο τα περιττά n και έχουμε:

$$e^{\omega t} - e^{-\omega t} = 2\omega t + \frac{(\omega t)^3}{3} + \frac{(\omega t)^5}{60} + \cdots + O\left(\omega t^k\right)$$

(12)

Τώρα λοιπόν η (10) γράφεται:

$$2\omega t + \frac{\omega^2 t^3}{3} + \frac{\omega^4 t^5}{60} + \cdots = \frac{2\sqrt{2lh - h^2}}{l - h}$$

(13)

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ TAYLOR ΣΤΟΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟ

Από την (13) μπορούμε να βρούμε τον χρόνο με όποια προσέγγιση θέλουμε. Θα μπορούσαμε να βγάλουμε όμως και ένα πιο «όμορφο» αποτέλεσμα αν βρούμε την εκθετική τιμή και μετά αναπτύξουμε τον λογάριθμο κατά Maclaurin (Taylor) σε κάποια σημείο εκτός φυσικά του μηδενός. Δηλαδή αν επανέλθουμε στη (10) έχουμε:

$$e^{\omega t} - \frac{1}{e^{\omega t}} = \frac{2\sqrt{2lh - h^2}}{l - h} = c \Longrightarrow (e^{\omega t})^2 - c(e^{\omega t}) - 1 = 0$$

(14)

Η παραπάνω είναι δευτεροβάθμια ως προς τον εκθετικό παράγοντα και έχει μοναδική θετική λύση την:

$$e^{\omega t} = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} \Longrightarrow \omega t = \ln\left(\frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2}\right)$$

(15)

Η Maclaurin του λογαρίθμου για α=1 δίνεται από την σειρά:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!\, x^3}{3!} - \cdots$$

(20)

Θέτουμε λοιπόν για το x την τιμή:

$$x = \frac{c + \sqrt{c^2 + 4}}{2} - 1$$

(21)

Και έχουμε με άψογη προσέγγιση τον χρόνο:

$$t = \frac{1}{\omega}\left[x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!\,x^3}{3!} - \cdots\right]$$

(22)

Ο στόχος των αναπτυγμάτων είναι να μπορέσουμε να υπολογίσουμε μόνοι μας χωρίς βοήθεια υπολογιστή την τιμή του χρόνου με καλή προσέγγιση. Είναι μια αριθμητική διαδικασία.

Ας το δούμε στην πράξη. Αρχικά η σχέση (13) είναι ίσως πιο χρήσιμη της (22) οπότε ας χρησιμοποιήσουμε αυτή.

Έστω ότι το ρευστό στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2r/s$ και ότι $l = 2m$ και $h = 1m$ τότε είναι:

$$4t + \frac{4t^3}{3} + \frac{16t^5}{60} + \cdots = 2\sqrt{3}$$

(14)

Παρατηρούμε ότι:

$$4 > 2\sqrt{3}$$

Οπότε σίγουρα t<1sec, άρα μια προσέγγιση με τους δύο πρώτους όρους είναι εξαιρετική και άρα έχουμε:

$$4t + \frac{4}{3}t^3 = 2\sqrt{3} \Longrightarrow t^3 + 3t - 2{,}6 = 0$$

(15)

Η οποία είναι 3^{ου} βαθμού ως προς t και λύνεται αναλυτικά χρησιμοποιώντας τους τύπους της τριτοβάθμιας εξίσωσης. Η θετική της λύση είναι περίπου 0,7. Άρα λύσαμε ένα φυσικό πρόβλημα το οποίο χωρίς τις παραπάνω μεθόδους θα ήταν άλυτο με χαρτί και μολύβι. Η αριθμητική προσέγγιση συναρτήσεων κτλ τελικά είναι εξαιρετικά χρήσιμη αν και αντικαθίσταται ορθά και με πολύ μεγαλύτερη ευκολία, ταχύτητα, ακρίβεια από τα υπολογιστικά προγράμματα ή τις προσομοιώσεις.