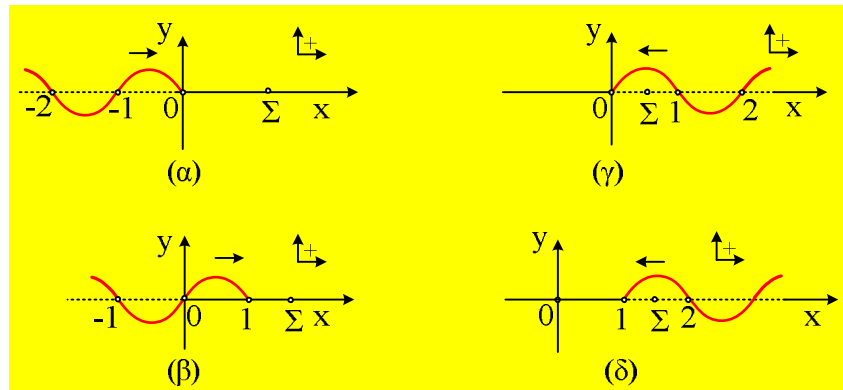


Βρείτε την εξίσωση του κύματος

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται ένα κύμα πλάτους $A=0,2\text{m}$ με περίοδο 3s . Ζητάμε την εξίσωση του κύματος, στις περιπτώσεις που εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα, όπου τα στιγμιότυπα (α) και (β) αναφέρονται σε κύματα που διαδίδονται προς τα δεξιά (προς την θετική κατεύθυνση), ενώ τα (γ) και (δ) προς τα αριστερά, ενώ όλα τα στιγμιότυπα αναφέρονται στην στιγμή $t=0$.



Απάντηση:

- i) Το κύμα του (α) στιγμιότυπου έχει μήκος κύματος 2m και περίοδο $T=3\text{s}$ και φτάνει την στιγμή $t=0$, στην θέση $x=0$, ενώ το σημείο του μέσου ξεκινά να ταλαντώνεται από την θέση ισορροπίας, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση. Αλλά τότε η εξίσωση της απομάκρυνσής του ικανοποιεί την εξίσωση:

$$y_o = A \cdot \eta\mu(\omega t) \quad (1)$$

Οπότε ένα τυχαίο σημείο Σ , που βρίσκεται δεξιότερα, στην θέση x , θα καθυστερήσει να αρχίσει να ταλαντώνεται κατά $x = vt_1 \rightarrow t_1 = \frac{x}{v}$, με αποτέλεσμα να έχει αντίστοιχη εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_\alpha = A \cdot \eta\mu(\omega(t-t_1)) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right)\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$y_\alpha = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{3} - \frac{x}{2}\right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.})$$

- ii) Το κύμα του (β) στιγμιότυπου έχει τα ίδια χαρακτηριστικά, απλά έχει προχωρήσει λίγο πέρα από την θέση $x=0$, οπότε για ένα τυχαίο σημείο Σ στην θέση x (ας πάρουμε ότι $x > 1\text{m}$, οπότε το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμη τη στιγμή $t=0$), το κύμα θα φτάσει μετά από χρόνο:

$$\Delta x = vt_2 \rightarrow t_2 = \frac{x-1}{v} \quad (\text{S.I.})$$

με αποτέλεσμα το τυχαίο σημείο να έχει εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_\beta = A \cdot \eta\mu(\omega(t-t_2)) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x-1}{v}\right)\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x-1}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$y_\alpha = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{3} - \frac{x-1}{2} \right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.)}$$

Σημείωση: Η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε να πάρει την μορφή:

$$y_\alpha = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{3} - \frac{x-1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu \left(2\pi \frac{t}{3} - 2\pi \frac{x}{2} + \pi \right)$$

Χωρίς να πρέπει να μας τρομάζει η παρουσία του π στην φάση...

iii) Το κύμα του (γ) στιγμιότυπου έχει επίσης τα ίδια χαρακτηριστικά με το (α), με την διαφορά ότι διαδίδεται προς τα αριστερά. Αλλά τότε το σημείο Δ στην θέση, έχει αρχίσει να ταλαντώνεται πριν την στιγμή $t=0$, κατά χρονικό διάστημα t_3 , όπου:

$$x = \upsilon t_3 \rightarrow t_3 = \frac{x}{\upsilon}$$

Οπότε η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Σ θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$y_\gamma = A \cdot \eta\mu(\omega(t+t_3)) = A \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x}{\upsilon} \right) \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \rightarrow$$

$$y_\alpha = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{3} + \frac{x}{2} \right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.)}$$

iv) Το κύμα του (δ) στιγμιότυπου έχει τα ίδια χαρακτηριστικά, απλά δεν έχει φτάσει την στιγμή $t=0$, στην θέση $x=0$. Έτσι αν το σημείο που έχει φτάσει το κύμα, ταλαντώνεται με βάση την εξίσωση (1), τότε το σημείο Σ στην θέση x (ας πάρουμε ότι $x > 1\text{m}$), ταλαντώνεται για περισσότερο χρόνο, κατά χρονικό διάστημα t_4 , όπου:

$$\Delta x = \upsilon t_4 \rightarrow t_4 = \frac{x-1}{\upsilon} \quad (\text{S.I.})$$

με αποτέλεσμα το τυχαίο σημείο να έχει εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_\delta = A \cdot \eta\mu(\omega(t+t_4)) = A \cdot \eta\mu \left(\frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{x-1}{\upsilon} \right) \right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x-1}{\lambda} \right) \rightarrow$$

$$y_\delta = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{3} + \frac{x-1}{2} \right) \quad (\text{μονάδες στο S.I.)}$$

Ή αν προτιμάτε:

$$y_\delta = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{3} + \frac{x-1}{2} \right) = 0,2 \cdot \eta\mu \left(2\pi \frac{t}{3} + 2\pi \frac{x}{2} - \pi \right)$$

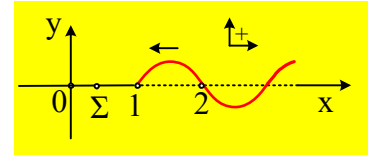
Σημείωση:

Θα μπορούσε κάποιος να διατυπώσει αντίρρηση ότι επιλέξαμε το τυχαίο σημείο Σ σε θέσεις που μας βόλευαν. Είναι έτσι; Ας πάρουμε το τελευταίο κύμα και ας πάρουμε το Σ , σαν σημείο που δεν έχει φτάσει το κύμα,

όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Τότε το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει στο σημείο Σ κατά:

$$d = vt_5 \rightarrow t_5 = \frac{l-x}{v}$$



Με αποτέλεσμα να έχουμε για την απομάκρυνσή του:

$$y_\delta = A \cdot \eta\mu(\omega(t-t_5)) = A \cdot \eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l-x}{v}\right)\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l-x}{\lambda}\right) \rightarrow$$

$$y_\delta = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{3} + \frac{x-1}{2}\right) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

Προφανώς προέκυψε η ίδια εξίσωση...

dmargaris@gmail.com