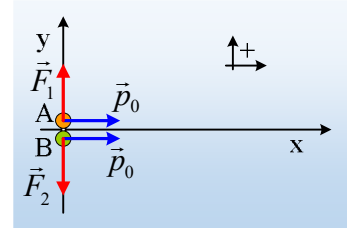


## Η ορμή και η μεταβολή της σε δυο γνωστές κινήσεις

Από ένα σημείο Ο ενός λείου οριζοντίου επιπέδου, το οποίο ταυτίζεται με την αρχή ενός συστήματος οριζοντίων και ορθογωνίων αξόνων x,y, εκτοξεύονται κάποια στιγμή  $t_0=0$ , δύο όμοιες μικρές σφαίρες Α και Β, με την ίδια ορμή, στην διεύθυνση του άξονα x, με μέτρο  $p_0=0,4\pi \text{ kg}\cdot\text{m/s}$ . Στις σφαίρες ασκούνται δύο αντίθετες δυνάμεις, με ίσα μέτρα  $|F_1|=|F_2|=1\text{N}$ . Η  $F_1$  διατηρεί σταθερή κατεύθυνση, αυτήν του άξονα y, όπως στο σχήμα, ενώ η  $F_2$  παραμένει διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα της Β σφαίρας.



i) Να βρεθεί ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της ορμής, κάθε σφαίρας.

ii) Ποια η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας, μέχρι τη στιγμή  $t_1=2\text{s}$

iii) Τη στιγμή  $t_1$  να βρεθούν:

α) οι συνιστώσες ορμής  $p_x$  και  $p_y$  για κάθε σφαίρα.

β) οι αντίστοιχοι ρυθμοί μεταβολής της ορμής, κάθε σφαίρας (στιγμιαίοι ρυθμοί, στους άξονες x και y).

Στο σχήμα έχει σημειωθεί ο προσανατολισμός των αξόνων, ενώ  $\pi^2=10$ .

### Απάντηση:

i) Από τον γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής της σώματος:

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \Sigma \vec{F} \quad \text{ή} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{F} \quad (1)$$

Όπου η 2<sup>η</sup> γραφή της επισημαίνει ότι αναφερόμαστε σε στιγμιαίο ρυθμό, όπως μιλάμε για στιγμιαία επιτάχυνση ή και για στιγμιαία ταχύτητα, σε αντιδιαστολή με την μέση επιτάχυνση, μέση ταχύτητα και ... μέσο ρυθμό μεταβολής της ορμής!

Αλλά σε κάθε σφαίρα, βάρος και κάθετη αντίδραση του επιπέδου δίνουν μηδενική συνισταμένη, οπότε η μόνη δύναμη στις σφαίρες οι οποίες θα μεταβάλουν την ορμή, είναι οι δυνάμεις  $F_1$  και  $F_2$  του σχήματος.

Έτσι έχουμε:

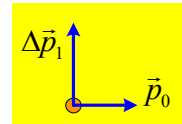
$$\text{Σφαίρα Α: } \frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 \rightarrow \frac{dp_1}{dt} = F_1 = +1\text{kgm/s}^2.$$

$$\text{Σφαίρα Β: } \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 \rightarrow \frac{dp_2}{dt} = F_2 = -1\text{kgm/s}^2.$$

Όπου οι αλγεβρικές τιμές των παραπάνω ρυθμών, δίνουν και την φορά των δύο ρυθμών, πάνω στον άξονα y.

ii) Για την Α σφαίρα, η ασκούμενη δύναμη είναι σταθερή (κατεύθυνση και μέτρο), συνεπώς ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ορμής, είναι ίσος και με τον μέσο ρυθμό στο διάστημα 0-2s. Οπότε η παραπάνω σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} \rightarrow \Delta p_1 = F \cdot \Delta t = 1 \cdot 2 \text{kgm} / \text{s} = 2 \text{kgm} / \text{s}$$



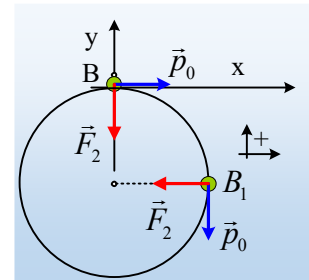
Με διεύθυνση αυτή του άξονα y και φορά προς τα πάνω.

Αντίθετα ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της B σφαίρας δεν παραμένει σταθερός, αφού η δύναμη αλλάζει διεύθυνση, μιας και να παραμένει διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα. Αλλά τότε αυτή η δύναμη παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου, υποχρεώνοντας το σώμα να κινηθεί σε κυκλική τροχιά, εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση, με ακτίνα:

$$F = m \frac{v_0^2}{R} \rightarrow R = m v_0 \frac{v_0}{F} = p_0 \frac{v_0}{F} \quad (1)$$

Και με περίοδο:

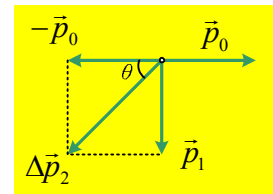
$$v_0 = \frac{2\pi R}{T} \xrightarrow{(1)} T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi \cdot p_0 \cdot v_0}{v_0} = 2\pi \cdot 0,4\pi \text{ s} = 8\text{s}$$



Αλλά τότε την στιγμή  $t_1=2\text{s} = \frac{1}{4} T$ , η σφαίρα έχει διαγράψει το ένα τέταρτο του κύκλου, περνώντας από το σημείο B1, με ταχύτητα όπως στο σχήμα, οπότε η δύναμη έχει την διεύθυνση του άξονα x, με κατεύθυνση προς την αρνητική κατεύθυνση.

Αν σχεδιάσουμε την αρχική και τελική ορμή της σφαίρας B για τις στιγμές  $t_0$  και  $t_1$ , παίρνουμε το διπλανό σχήμα, οπότε για την μεταβολή της ορμής, θα έχουμε:

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_1 - \vec{p}_0 \rightarrow \Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + (-\vec{p}_0) \rightarrow$$



Με βάση τα παραπάνω, η μεταβολή της ορμής έχει μέτρο:

$$\Delta p_2 = \sqrt{p_0^2 + p_1^2} = \sqrt{2p_0^2} = p_0\sqrt{2} = 0,4\pi\sqrt{2} \text{kgm} / \text{s}$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με το διάνυσμα  $-\vec{p}_0$  γωνία  $\theta=45^\circ$ , αφού το παραλληλόγραμμο του σχήματος είναι τετράγωνο.

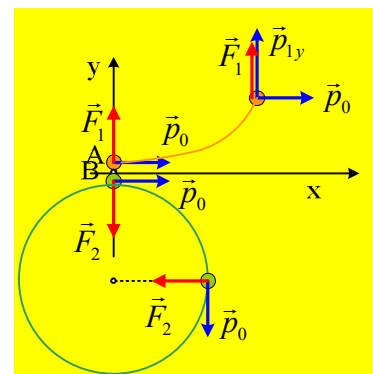
iii) Η σφαίρα A κινείται σε παραβολική τροχιά, όπου η κίνηση στον άξονα x είναι ευθύγραμμη ομαλή, ενώ στην διεύθυνση y κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα. Αντίθετα η σφαίρα B κινείται σε κύκλο, εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση.

α) Συνεπώς για την ορμή της A σφαίρας στους δυο άξονες θα έχουμε:

$$p_{1x} = p_0 = 0,4\pi \text{ kgm/s} \text{ και } p_{1y} = \Delta p_1 = 2 \text{kgm} / \text{s}$$

Ενώ για την B σφαίρα:

$$p_{2x} = 0 \text{ και } p_{2y} = -p_0 = -0,4\pi \text{ kgm} / \text{s}$$



β) Για τους αντίστοιχους ρυθμούς μεταβολής της ορμής, στους δυο άξονες, θα έχουμε:

$$\frac{dp_{1x}}{dt} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{dp_{1y}}{dt} = F_1 = 1 \text{kgm/s}^2.$$

$$\frac{dp_{2x}}{dt} = F_2 = -1 \text{kgm/s}^2 \quad \text{και} \quad \frac{dp_{2y}}{dt} = 0$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)