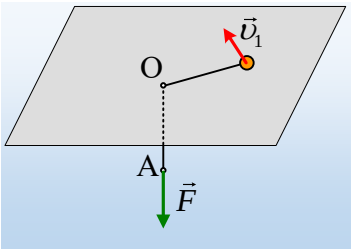
Μεταβάλλοντας την ακτίνα της τροχιάς



Ένα σφαιρίδιο μάζας m=0,3kg βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι, δεμένο στο ένα άκρο αβαρούς νήματος μήκους l=1m. Το νήμα αφού περάσει από μια τρύπα Ο, στην επιφάνεια του τραπεζιού στο άλλο του άκρο Α, όπου (ΟΑ)=0,4m, μπορούμε να ασκούμε μια κατακόρυφη δύναμη F. Κάποια στιγμή προσδίδουμε στο σφαιρίδιο μια αρχική οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_1=2m/s, με διεύθυνση κάθετη στο νήμα, ενώ ταυτόχρονα ασκούμε στο άκρο Α του νήματος, κατακόρυφη δύναμη μέτρου F_1=3N.

i) Να υπολογισθεί η αρχική επιτάχυνση την οποία θα αποκτήσει το σφαιρίδιο.

ii) Τι πρόκειται να κάνει το άκρο Α του νήματος:

α) Θα παραμείνει ακίνητο,

β) θα κινηθεί προς τα πάνω,

γ) θα κινηθεί προς τα κάτω.

iii) Αυξάνοντας το μέτρο της ασκούμενης δύναμης F, κατεβάζουμε το άκρο Α του νήματος κατά h=0,3m, διατηρώντας το σταθερό στην τελική θέση, ασκώντας του δύναμη μέτρου F_2.

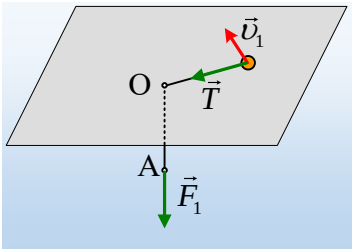
α) Να υπολογιστεί η τελική ταχύτητα υ_2 του σφαιριδίου.

β) Να βρεθεί το μέτρο της δύναμης F_2.

γ) Πόσο είναι το έργο της δύναμης κατά την διάρκεια της μετακίνησης του άκρου Α του νήματος;

Δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ νήματος (κατά το πέρασμά του από την τρύπα) και της επιφάνειας τους τραπεζιού.

Απάντηση:



i) Μέσω του νήματος, μεταφέρεται η δύναμη F στο σφαιρίδιο. Έτσι το σφαιρίδιο δέχεται την τάση του νήματος μέτρου T=F_1=3N, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει επιτάχυνση, στην διεύθυνση του νήματος, μέτρου:

$$\vec{T} = m\vec{a}_1 \rightarrow a_1 = \frac{T}{m} = \frac{F_1}{m} = \frac{3N}{0,3kg} = 10m/s^2.$$

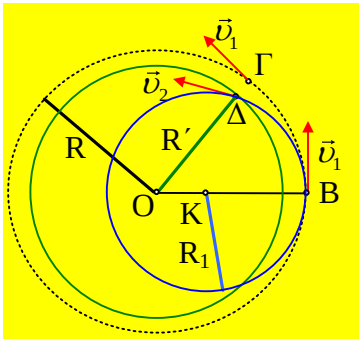
ii) Το τι θα κάνει το άκρο Α του νήματος εξαρτάται από το αν η παραπάνω δύναμη είναι ή όχι ίση κατά μέτρο, με την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη, που απαιτείται να ασκηθεί στο σφαιρίδιο, για να διαγράψει κύκλο με ακτίνα $R = \ell - (OA) = 0,6m$. Αν σκεφτούμε με βάση τις αντίστοιχες επιταχύνσεις, η αντίστοιχη κεντρομόλος επιτάχυνση, θα έχει μέτρο:

$$\alpha_{\kappa,o} = \frac{\upsilon_1^2}{R} = \frac{2^2}{0,6} m/s^2 \approx 6,7m/s^2.$$

Βλέπουμε ότι η επιτάχυνση που αποκτά το σφαιρίδιο, έχει μεγαλύτερο μέτρο από την απαιτούμενη

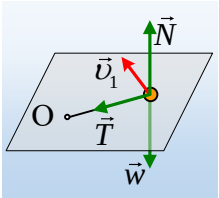
κεντρομόλο επιτάχυνση. Τι σημαίνει αυτό; Η επιτάχυνση αυτή είναι μεν κεντρομόλος (κάθετη στην ταχύτητα), αλλά θα μεταβάλλει την διεύθυνση της ταχύτητας, υποχρεώνοντας το σφαιρίδιο να κινηθεί σε κυκλική τροχιά, ακτίνας όχι R=0,6m, αλλά μικρότερης ακτίνας, αφού πρέπει να ισχύει:

$$\alpha_1 = \frac{\upsilon_1^2}{R_1} \rightarrow R_1 = 0,4m$$



Ας δούμε το διπλανό σχήμα σε κάτοψη. Έστω το σφαιρίδιο σε μια στιγμή περνά από την θέση Β, με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$. Αν η ασκούμενη δύναμη ήταν ίση με την κεντρομόλο (και προκαλούσε επιτάχυνση 6,7m/s^2), μετά από λίγο (στην πραγματικότητα αναφερόμαστε σε απειροελάχιστο χρόνο, αλλά για τις ανάγκες του σχήματος, έχουμε πάρει αρκετά μεγάλα τόξα…) θα έφτανε στο σημείο Γ, με ταχύτητα ίδιου μέτρου, εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. Όμως τώρα η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο Β, είναι R_1=0,4m, δηλαδή το σφαιρίδιο τείνει να κινηθεί σε κύκλο κέντρου Κ (μπλε γραμμή), οπότε το σφαιρίδιο θα φτάσει στο σημείο Δ του σχήματος με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$. Αλλά στην θέση αυτή απέχει απόσταση R΄ από το Ο (το μήκος του νήματος, μέχρι την οπή), οπότε αν σχεδιάσουμε έναν κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R΄ (με πράσινη γραμμή), βλέπουμε ότι η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ δεν είναι εφαπτόμενη του κύκλου αυτού! Υπάρχει και μια συνιστώσα ταχύτητας προς το κέντρο Ο, πράγμα που σημαίνει ότι έχει μικρύνει η ακτίνα, αλλά θα μικρύνει και άλλο, αφού υπάρχει ακτινική συνιστώσα ταχύτητας, οπότε το άκρο Α κινείται προς τα κάτω και τη στιγμή αυτή έχει κατέβει κατά R-R΄, σε σχέση με την αρχική του θέση. Σωστό το γ).

iii) Αν στην τελική θέση, το Α έχει κατέβει κατά 0,3m, αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα περιφοράς του σφαιριδίου έχει γίνει r=0,6m-0,3m=0,3m. Αλλά σε όλη την παραπάνω κίνηση όπου το σφαιρίδιο περιφέρεται γύρω από το Ο, ενώ ταυτόχρονα μειώνεται η ακτίνα της τροχιάς του (μια τροχιά σχήματος σπείρας), οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του, είναι οι κατακόρυφες δυνάμεις βάρος και κάθετη αντίδραση από το τραπέζι (μηδενικής συνισταμένης, αλλά και μηδενικής ολικής ροπής ως προς το Ο) και η τάση του νήματος, η οποία επίσης έχει μηδενική ροπή ως προς το Ο.



α) Αφού για το σφαιρίδιο Στ=0, η στροφορμή του σφαιριδίου ως προς το Ο (ή αν προτιμάτε ως προς κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το Ο), παραμένει σταθερή, οπότε:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \rightarrow m\upsilon_1 R = m\upsilon_2 r \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{\upsilon_1 R}{r} = \frac{2 \cdot 0,6}{0,3} m/s = 4m/s$$

β) Στην τελική κατάσταση, το σφαιρίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r και η ασκούμενη στο άκρο Α κατακόρυφη δύναμη F_2, ίση με την αντίστοιχη τάση του νήματος, η οποία παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου, θα έχε μέτρο:

$$F_2 = T_2 = m\frac{\upsilon_2^2}{r} = 0,3 \cdot \frac{4^2}{0,3} N = 16 N$$

γ) Αξίζει να προσεχθεί ότι κατά την διάρκεια μείωσης της τροχιάς του σφαιριδίου, η τάση του νήματος δεν είναι διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα. Αυτό συμβαίνει μόνο στην αρχική και την τελική θέση! (Αρκεί να σχεδιάσετε την τάση του νήματος στην θέση Δ, του προηγούμενου σχήματος). Αλλά τότε η τάση του νήματος (και κατά συνέπεια η δύναμη F) παράγει έργο, το οποίο θα υπολογιστεί μέσω του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σφαιριδίου.

$$K_2 - K_1 = W_w + W_N + W_T \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = 0 + 0 + W_F \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}0,3 \cdot 4^2 J - \frac{1}{2}0,3 \cdot 2^2 J = 1,8 J$$

Και μια ***ερώτηση:***

Γιατί η ταχύτητα στο Δ έχει διαφορετικό μέτρο από την ταχύτητα στο Γ; Το μέτρο της υ_2 είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το μέτρο της υ_1;

dmargaris@gmail.com