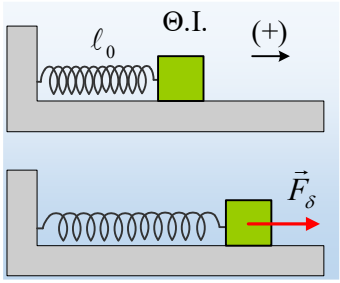
Τα βασικά σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση



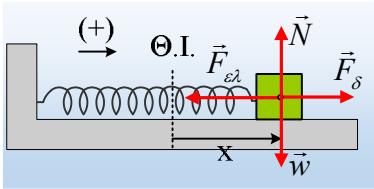
Ένα σώμα μάζας 2kg ταλαντώνεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=40N/m, με σταθερό πλάτος A=0,5m, ενώ πάνω του ασκείται δύναμη απόσβεσης της μορφής $F_{απ}$=-b·υ, με την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης της μορφής $F_\delta=F_0$·ημ(5t+θ).

i) Να βρεθεί η δύναμη του διεγέρτη τη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στην θέση x=+A.

ii) Αν τη στιγμή t_1 που το σώμα περνά από την θέση x=0 η δύναμη του διεγέρτη έχει μέτρο 1N, να υπολογιστεί η σταθερά απόσβεσης b.

iii) Σε μια άλλη στιγμή t_2, το σώμα έχει ταχύτητα $υ_2$=+2m/s. Να βρεθεί η ισχύς της δύναμης του διεγέρτη την στιγμή αυτή.

Απάντηση:

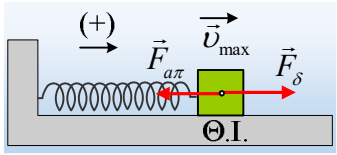


i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, στην θέση πλάτους (x=+A). Από τον θεμελιώδη νόμο της δυναμικής παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow F_\delta - F_{\varepsilon\lambda} = m\cdot\left(-\omega^2 x\right) \rightarrow F_\delta = kA - m\cdot\omega^2 A \rightarrow$$

$$F_\delta = 40\cdot 0,5N - 2\cdot 5^2\cdot 0,5N = -5N$$

Το αποτέλεσμα μας λέει ότι η δύναμη του διεγέρτη έχει φορά προς την αρνητική κατεύθυνση (προς την θέση ισορροπίας), αντίθετη από αυτήν που έχουμε σχεδιάσει στο σχήμα.



ii) Έστω ότι την στιγμή t_1 το σώμα περνά από την θέση x=0 (θέση φυσικού μήκους και θέση ισορροπίας της ταλάντωσης), κινούμενο προς τα δεξιά. Τότε στην θέση αυτή δέχεται τις οριζόντιες δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα. Αφού το σώμα τη στιγμή αυτή περνά από την θέση x=0, θα έχει και μηδενική επιτάχυνση, μιας και στις αρμονικές ταλαντώσεις η επιτάχυνση συνδέεται με την απομάκρυνση με την εξίσωση α=-$ω^2$x. Αλλά τότε αν η δύναμη απόσβεσης έχει φορά αντίθετη της ταχύτητας, με κατεύθυνση προς τα αριστερά, η δύναμη του διεγέρτη, θα έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα και θα έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \left|F_\delta\right| = \left|F_{\alpha\pi}\right| = b\upsilon_{max} \rightarrow$$

$$b = \frac{F_{\delta,1}}{\omega A} = \frac{1N}{5\cdot 0,5m/s} = 0,4kg/s$$

iii) Αν η απομάκρυνση του σώματος δίνεται από την εξίσωση x=A·ημ(ωt+φ), τότε η ταχύτητα του σώματος θα ικανοποιεί την εξίσωση υ=ωA·συν(ωt+φ), οπότε παίρνουμε:

$$\eta\mu(\omega t+\varphi)=\frac{x}{A} \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi)=\frac{\upsilon}{\omega A}\rightarrow$$

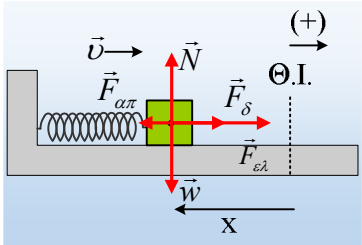
$$\eta\mu^2(\omega t+\varphi)+\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi)=\frac{x^2}{A^2}+\frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}\rightarrow$$

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}=1 \quad (1)$$

Λύνοντας την εξίσωση (1) ως προς x παίρνουμε:

$$x=\pm\sqrt{A^2-\frac{\upsilon^2}{\omega^2}}=\pm\sqrt{0,5^2-\frac{2^2}{5^2}}m=\pm\sqrt{0,25-0,16}m=\pm 0,3m$$

Έτσι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:



α) Το σώμα περνά από την θέση x=-0,3m κινούμενο προς τα δεξιά. Τότε με βάση το διπλανό σχήμα θα έχουμε:

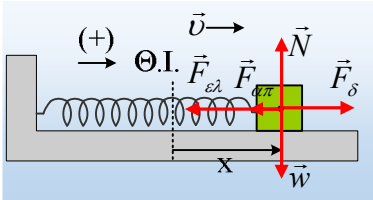
$$\Sigma F_x=ma\rightarrow F_\delta+F_{\varepsilon\lambda}+F_{\alpha\pi}=m\cdot\left(-\omega^2 x\right)\rightarrow$$

$$F_\delta-kx-b\upsilon=-m\cdot\omega^2 x\rightarrow$$

$$F_\delta=kx+b\upsilon-m\cdot\omega^2 x=40\cdot(-0,3)N+0,4\cdot 2N-2\cdot 5^2\cdot(-0,3)N=3,8N$$

Οπότε η στιγμιαία ισχύς της δύναμης θα είναι ίση:

$$P=\left|F_\delta\right|\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu 0^\circ=3,8\cdot 2W=7,6W$$



β) Το σώμα περνά από την θέση x=+0,3m, οπότε θα έχουμε τις δυνάμεις όπως στο διπλανό σχήμα, από όπου:

$$\Sigma F_x=ma\rightarrow F_\delta+F_{\varepsilon\lambda}+F_{\alpha\pi}=m\cdot\left(-\omega^2 x\right)\rightarrow$$

$$F_\delta-kx-b\upsilon=-m\cdot\omega^2 x\rightarrow$$

$$F_\delta=kx+b\upsilon-m\cdot\omega^2 x=40\cdot 0,3N+0,4\cdot 2N-2\cdot 5^2\cdot 0,3N=-2,2N$$

Αντίθετης κατεύθυνσης από αυτήν του παραπάνω σχήματος.

Αλλά τότε η στιγμιαία ισχύς της δύναμης θα είναι ίση:

$$P=\left|F_\delta\right|\cdot\upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu 180^\circ=-2,2\cdot 2W=-4,4W$$

Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η δύναμη του διεγέρτη, μεταφέρει ενέργεια στο σώμα στην θέση x=-0,3m, αλλά αφαιρεί ενέργεια από αυτό, στην θέση x=+0,3m. Μπορεί ο διεγέρτης να «δίνει» ενέργεια συνολικά σε χρόνο μιας περιόδου, ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της δύναμης απόσβεσης, αλλά στην διάρκεια της περιόδου υπάρχουν διαστήματα που «δίνει», αλλά και διαστήματα που «παίρνει» ενέργεια.

dmargaris@gmail.com