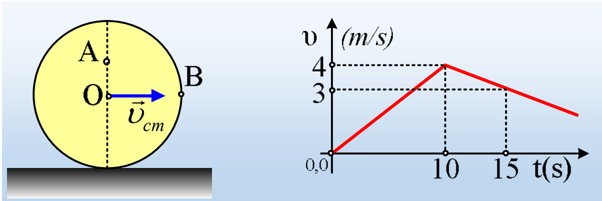
Ταχύτητες και επιταχύνσεις στην κύλιση

Ένα αυτοκίνητο βρίσκεται ακίνητο σε οριζόντιο δρόμο. Κάποια στιγμή το αυτοκίνητο αρχίζει να κινείται ευθύγραμμα και στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο. Μελετάμε την κίνηση του τροχού του αυτοκινήτου, κέντρου (και κέντρου μάζας) Ο, με ακτίνα R=0,8m, ο οποίος διαρκώς κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει).



i) Να βρεθεί η επιτάχυνση του κέντρου Ο καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, την στιγμή t_1 =5s.

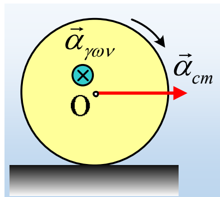
ii) Να υπολογισθούν η ταχύτητα, η οριζόντια επιτάχυνση α_x και η κατακόρυφη επιτάχυνση α_y του σημείου Α του τροχού, στο μέσον μιας κατακόρυφης ακτίνας, όπως στο σχήμα, την στιγμή t_1.

iii) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις για το σημείο Β του τροχού, στο άκρο μιας οριζόντιας ακτίνας του, την χρονική στιγμή t_2=15s;

Απάντηση:

i) Προφανώς η ταχύτητα του αυτοκινήτου είναι και η ταχύτητα υ_{cm} του κέντρου Ο του τροχού, ενώ η επιτάχυνση α_{cm} παραμένει σταθερή από 0-10s, αφού το διάγραμμα υ-t έχει σταθερή κλίση. Έτσι παίρνουμε:

$$\alpha_{cm,1} = \frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{4-0}{10-0}\, m/s^2 = 0,4\, m/s^2$$



Αλλά αφού ο τροχός κυλίεται, στρέφεται δεξιόστροφα όπως στο σχήμα, έχοντας και γωνιακή επιτάχυνση μέτρου:

$$\alpha_{cm,1} = \alpha_{\gamma\omega\nu,1} R \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,1} = \frac{\alpha_{cm,1}}{R} = \frac{0,4}{0,8}\, rad/s^2 = 0,5\, rad/s^2$$

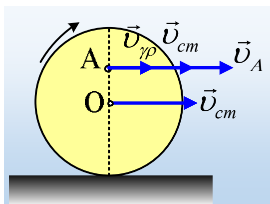
Στο σχήμα φαίνονται τα διανύσματα για τα δύο παραπάνω μεγέθη.

ii) Με βάση το διάγραμμα υ-t, τη στιγμή t_1 η ταχύτητα του κέντρου Ο είναι ίση με 2m/s (γιατί;). Εναλλακτικά η κίνηση του κέντρου Ο είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη οπότε:

$$\upsilon_{cm,1} = \alpha_{cm,1} t_1 = 0,4 \cdot 5\, m/s = 2\, m/s .$$

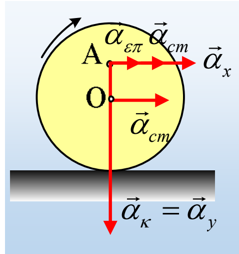
Θεωρώντας την κίνηση του τροχού ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια περιστροφική γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του Ο, με γωνιακή ταχύτητα ω, τότε το σημείο Α, θα έχει:

α) Ταχύτητα ίση με το διανυσματικό άθροισμα της υ_{cm} και της $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot r$, λόγω της περιστροφικής κίνησης, όπως στο σχήμα, οπότε:



$$\upsilon_A = \upsilon_{cm,1} + \omega \cdot r = \upsilon_{cm,1} + \frac{\upsilon_{cm,1}}{R} \cdot r = 2\, m/s + \frac{2}{0,8} \cdot 0,4\, m/s = 3\, m/s$$

β) Επιτάχυνση α_{cm} λόγω μεταφορικής κίνησης, ενώ λόγω της επιταχυνόμενης στροφικής κίνησης, μια εφαπτομενική επιτάχυνση, την $\alpha_{\varepsilon\pi}$ υπεύθυνη για την αύξηση του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας και μια κεντρομόλο α_κ, υπεύθυνη για την αλλαγή στην κατεύθυνση της γραμμικής ταχύτητας. Στο σχήμα βλέπετε τις επιταχύνσεις αυτές. Για τα μέτρα τους θα έχουμε:



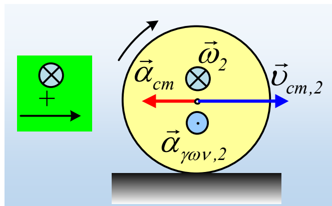
$$\alpha_x = \alpha_{cm,1} + a_{\varepsilon\pi} = \alpha_{cm,1} + \alpha_{\gamma\omega\nu,1}\cdot r = 0,4\,{}^{m}\!/_{s^2} + 0,5\cdot 0,4\,{}^{m}\!/_{s^2} = 0,6\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

$$a_y = a_\kappa = \omega^2\cdot r = \left(\frac{\upsilon_{cm,1}}{R}\right)^2\cdot r = \frac{2^2}{0,8^2}\cdot 0,4\,{}^{m}\!/_{s^2} = 2,5\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

iii) Ο τροχός συνεχίζει να κυλίεται, οπότε την στιγμή t_2=15s, έχει $\upsilon_{cm,2}$=3m/s ενώ έχει γωνιακή ταχύτητα:

$$\upsilon_{cm,2} = \omega_2 R \rightarrow \omega_2 = \frac{\upsilon_{cm,2}}{R} = \frac{3}{0,8}\,rad/s = \frac{15}{4}\,rad/s$$

Εξάλλου για τις επιταχύνσεις, από την κλίση στο διάγραμμα υ-t, παίρνουμε για τη στιγμή t_2:



$$\alpha_{cm,2} = \frac{d\upsilon_2}{dt} = \frac{\Delta\upsilon_{10\to15}}{\Delta t_{10\to15}} = \frac{3-4}{15-10}\,{}^{m}\!/_{s^2} = -0,2\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

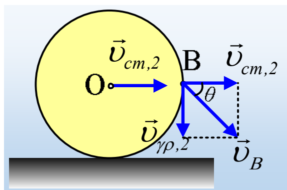
Ενώ για το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης ισχύει:

$$\alpha_{cm,2} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2}R \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = \frac{|\alpha_{cm,2}|}{R} = \frac{0,2}{0,8}\,{}^{rad}\!/_{s^2} = 0,25\,{}^{rad}\!/_{s^2}$$

Με κατευθύνσεις όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αξίζει να προσεχθεί ποιες κατευθύνσεις θεωρήθηκαν θετικές (θετική ω, αλλά αρνητική $\alpha_{\gamma\omega\nu}$...)

Έτσι για το σημείο Β, δουλεύοντας όπως στο προηγούμενο ερώτημα θα έχουμε:

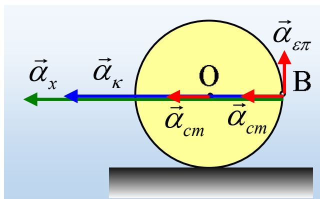
α) Για την ταχύτητα:



$$\upsilon_B = \sqrt{\upsilon^2_{cm,2} + (\omega R)^2} = \sqrt{2\upsilon^2_{cm,2}} = \upsilon_{cm,2}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\,{}^{m}\!/_{s}$$

Η διεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία θ=45° (τετράγωνο...) με την οριζόντια διεύθυνση.

β) Για τις επιταχύνσεις, αυτές που εμφανίζονται στο σχήμα, με μέτρα:



$$\alpha_x = \alpha_{cm,2} + a_\kappa = \alpha_{cm,2} + \omega_2^2\cdot R \rightarrow$$

$$\alpha_x = 0,2\,{}^{m}\!/_{s^2} + \left(\frac{15}{4}\right)^2\cdot 0,8\,{}^{m}\!/_{s^2} \approx 11,5\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

$$\alpha_y = a_{\varepsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu,2}\cdot R = 0,25\cdot 0,8\,{}^{m}\!/_{s^2} = 0,2\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

dmargaris@gmail.com